Simulation of a Ball-Beam System with Feedforward Compensation of Ball Weight

João Pedro Lemos Morais, Ana Angélica Mathias Macêdo and Edil Jarles de Jesus Nascimento

April 11, 2024

Simulação de um sistema barra-bola com compensação em malha direta do peso da bola ⋆

J. P. L. Morais * **A. A. M. Macêdo** ** **E. J. J. Nascimento** ***

* *Instituto Federal do Maranhão, campus Imperatriz, MA (e-mail: jp.lmorais@outlook.com).*
** *Instituto Federal do Maranhão, campus Imperatriz, MA (e-mail: ana.angelica@ifma.edu.br).*
*** *Instituto Federal do Maranhão, campus Imperatriz, MA (e-mail: edil.itz@ifma.edu.br).*

Abstract: The ball-beam system consists of a beam and a ball that can roll along the beam according to its inclination, showing a non-linear behavior. The torque acting on the beam due to the weight of the ball accounts for a considerable part of the non-linear components of the ball-beam system. Therefore, this work aims to reduce the influence of the nonlinear terms on the system by designing and simulating a ball-beam system with feedforward compensation of the ball weight. Linearized models were used to design a linear cascade control system tuned by pole placement via prototype Bessel low-pass filter, resulting in a simplified control process and mathematical expressions for the system controller parameters. Simulation of the step responses of the nonlinear ball-beam system showed that the ball weight significantly affected the time response of the system, while the other nonlinear terms had no significant influence. Compensating the weight of the ball with an additional voltage signal in the electric motor resulted in a dynamic behavior nearly identical to the linearized model. It can be concluded that feedforward compensation of the ball weight was sufficient to meet the performance requirements and to increase the reliability of the linear control method in the ball-beam system.

Resumo: O sistema barra-bola consiste em uma barra e uma bola a qual pode rolar ao longo da barra de acordo com a sua inclinação, apresentando um comportamento não linear . O torque na barra decorrente do peso da bola representa um percentual significativo das componentes não lineares do sistema barra-bola. Diante disso, este artigo tem como objetivo reduzir a influência dos termos não lineares sobre o sistema por meio do projeto e simulação de um sistema barra-bola com compensação em malha direta do peso da bola. Por meio de modelos linearizados, foi projetado um sistema de controle em cascata linear sintonizado por alocação de polos via protótipo de filtro passa-baixa de Bessel, que resultou em um processo de controle simplificado e em expressões matemáticas para os parâmetros dos controladores do sistema a partir de seus parâmetros construtivos. A simulação das respostas ao degrau do sistema barra-bola não linear mostrou que o peso da bola afetou significativamente a resposta temporal do sistema, com os demais termos não lineares não tendo influência significativa. A compensação do peso da bola por meio de um sinal de tensão adicional no motor elétrico fez seu comportamento ser praticamente idêntico ao modelo linearizado. Dessa forma, é possível concluir que a compensação em malha direta do peso da bola foi suficiente para atender aos requisitos de desempenho e aumentar a confiabilidade do método de controle linear aplicado no sistema barra-bola.

Keywords: ball-beam; nonlinear systems; cascade control; Bessel filter; feedforward compensation.

Palavras-chaves: barra-bola; sistemas não lineares; controle em cascata; filtro de Bessel; compensação em malha direta.

1. INTRODUÇÃO

O sistema barra-bola consiste em uma bola posicionada em uma barra, cuja inclinação é ajustada por um motor elétrico de forma a deslocar a bola em relação à barra (Tsarik, 2020). É um sistema popular no estudo de controle de sistemas dinâmicos por apresentar grande parte dos desafios encontrados ao projetar controladores para sistemas não lineares, permitindo avaliar o desempenho de métodos de controle não linear (Zaare and Soltanpour, 2021).

Diversos métodos de controle foram projetados e apresentados na literatura desde 1978 – data da publicação do primeiro artigo sobre o controle do sistema barra-bola (Wellstead et al., 1978) – até o presente momento, variando de métodos clássicos, como controle PID, até métodos

⋆ Agradecemos ao Instituto Federal do Maranhão pelo suporte financeiro dado a este trabalho.

modernos utilizando controle ótimo, controle adaptativo, lógica fuzzy, computação evolucionária (algoritmo genético, otimização por enxame de partículas, dentre outros), dentre outros (Zaare and Soltanpour, 2021).

O projeto de controladores para sistema barra-bola pode resultar em sistemas em malha fechada de ordem elevada, dificultando o ajuste dos parâmetros de controle para atender requisitos de desempenho em respostas temporais. Um método para determinar tais parâmetros que garanta o atendimento a requisitos de desempenho temporais como sobressinal e tempo de assentamento facilitaria o processo de controle e o ajuste do desempenho de sistemas barra-bola.

Um dos fatores não lineares presentes no comportamento dinâmico do sistema barra-bola é o torque na barra decorrente do peso da bola, que pode representar um percentual significativo das componentes não lineares do sistema barra-bola. Por apresentar uma formulação simples, uma compensação direta desse termo permitiria reduzir de forma simples a influência das componentes não lineares sobre o sistema barra-bola, aprimorando o desempenho dinâmico.

Diante disso, este artigo tem como objetivo reduzir os efeitos não lineares por meio do projeto e simulação de um sistema barra-bola regulado por um controlador em cascata linear sintonizado por alocação de polos baseado em um protótipo de filtro passa-baixa de Bessel, com compensação direta do peso da bola por meio de um sinal de tensão adicional no motor elétrico, possibilitando um ajuste mais direto e simplificado da resposta do sistema aos requisitos de desempenho temporais, bem como uma maior confiabilidade nos métodos de controle linear para o sistema barra-bola.

Esse trabalho será apresentado em três seções, que são: a) modelagem do sistema barra-bola; b) projeto do sistema de controle; e c) simulação da resposta temporal do sistema.

2. MODELAGEM DO SISTEMA BARRA-BOLA

A figura 1 apresenta um diagrama esquemático do sistema barra-bola estudado neste trabalho, cujos parâmetros são dados na tabela 1. O comportamento dinâmico do sistema barra-bola é descrito em (1) e (2), conforme mostrado em Schvarcz and Diniz (2010).

Tabela 1. Parâmetros do sistema barra-bola.

Parâmetro	Descrição	Unidade
m_{bo}	Massa da bola	kg
m_{ba}	Massa da barra	kg
J_{ba}	Momento de inércia da barra	kg.m²
r	Posição da bola	m
θ	Posição angular da barra	rad
R_0	Raio da bola	m
R_1	Raio de rolagem da bola	m
D	Altura do centro de gravidade da barra	m
d	Altura da superfície de rolagem da barra	m
L	Comprimento total da barra	m
τ	Torque externo aplicado à barra	N.m

$$A_1\ddot{r} - A_2\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 + g \cdot \mathrm{sen}(\theta) = 0 \tag{1}$$

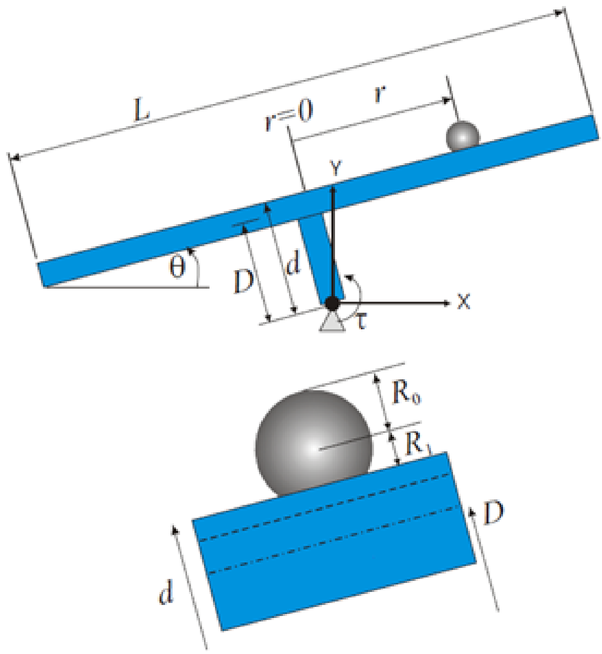

Figura 1. Diagrama esquemático do sistema barra-bola

$$A_6\ddot{\theta} + 2A_7 - m_{bo}A_2\ddot{r} - gm_{ba}D \cdot \mathrm{sen}(\theta) - gm_{bo}A_5 = \tau \tag{2}$$

$$A_1 = 1 + \frac{2R_0^2}{5R_1^2}, A_2 = d + R_1 + \frac{2R_0^2}{5R_1}, A_3 = R_1 + d,$$
$$A_4 = \frac{2R_0^2}{5} + A_3^2, A_5 = r \cdot \cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)A_3,$$
$$A_6 = J_{ba} + m_{bo} \cdot (r^2 + A_4), A_7 = m_{bo}r\dot{r}\dot{\theta}$$

onde $g = 9,81$ m/s^2 é a aceleração da gravidade. A equação (1) representa a dinâmica da bola em função da inclinação da barra, enquanto (2) representa a relação entre τ, r e θ.

Para aplicar as técnicas de controle linear nesse sistema, é necessário linearizar (1) e (2) em um de seus pontos de equilíbrio, representados pelo conjunto $\{r \in \mathbb{R}, \theta = 0, \tau = gm_{bo}r\}$. Adotando o ponto de equilíbrio $r_0 = \theta_0 = \tau_0 = 0$ e linearizando (1) e (2) por meio de expansão em série de Taylor em torno desse ponto de equilíbrio, truncada no seu termo de primeiro grau, obtêm-se (3) e (4):

$$A_1\ddot{r} - A_2\ddot{\theta} + g\theta = 0 \tag{3}$$

$$A_6\ddot{\theta} + A_8\theta - m_{bo}A_2\ddot{r} = \tau \tag{4}$$

$$A_8 = -g \cdot (m_{ba}D + m_{bo}A_3)$$

Isolando (3) e (4) para r e θ, respectivamente, e aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas devido ao ponto de equilíbrio escolhido, obtêm-se as funções de transferência dadas em (5) e (6):

$$R(s) = \frac{A_2s^2 - g}{A_1s^2}\Theta(s) \tag{5}$$

$$\Theta(s) = \frac{\mathrm{T}(s) + m_{bo} A_2 s^2 R(s)}{A_9 s^2 + A_8} \tag{6}$$

$$A_9 = J_{ba} + m_{bo} A_4$$

A função de transferência (6) possui duas entradas ($\mathrm{T}(s)$ e $R(s)$), das quais $R(s)$ não pode ser diretamente manipulada, resultando em um acoplamento entre (5) e (6). Para permitir a aplicação das técnicas de controle linear, os termos dependentes de $R(s)$ em (6) foram considerados como perturbações internas do sistema – a serem compensadas por meio de controle integral – e removidos do modelo linearizado. Dessa forma, obtêm-se a função de transferência (7):

$$\Theta(s) = \frac{\mathrm{T}(s)}{A_9 s^2 + A_8} \tag{7}$$

O torque externo τ é proveniente de um motor de corrente contínua (CC) controlado por armadura, representado na figura 2 (Bertolotto and Camargo, 2015). A tabela 2 descreve os parâmetros do motor CC.

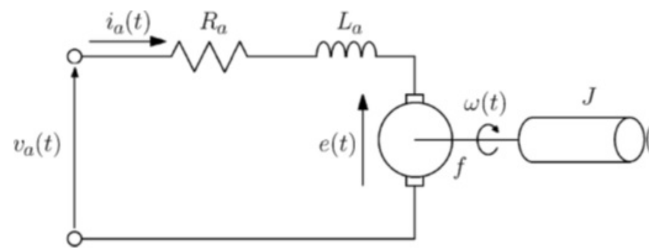

Figura 2. Diagrama esquemático de um motor CC

Tabela 2. Parâmetros do motor CC.

Parâmetro	Descrição	Unidade
v_a	Tensão na armadura	V
i_a	Corrente na armadura	A
R_a	Resistência da armadura	Ω
L_a	Indutância da armadura	H
e	Força contra-eletromotriz	V
ω	Velocidade angular do rotor	rad/s
J	Momento de inércia do rotor	kg.m²
K_m	Constante de torque do motor	N.m/A
K_b	Constante da força contra-eletromotriz	V.s/rad

Como o efeito de L_a sobre o comportamento dinâmico do motor CC é desprezível, a função de transferência no domínio da transformada de Laplace entre o torque do motor $\mathrm{T}_m(s)$ e a tensão de entrada $V_a(s)$ é dado em (8) (Bolton, 2019).

$$\mathrm{T}_m(s) = \frac{K_m \cdot (V_a(s) - K_b s \Theta(s))}{R_a} \tag{8}$$

Ao fazer $\mathrm{T}(s) = \mathrm{T}_m(s)$, devido ao motor CC ser o atuador responsável pelo torque externo τ na barra, pode-se introduzir a dinâmica do motor CC em (7), resultando em (9):

$$\Theta(s) = \frac{K_m}{R_a A_9 s^2 + K_b K_m s + R_a A_8} V_a \tag{9}$$

Substituindo (9) em (5), obtém-se a função de transferência entre a posição da bola $R(s)$ e a tensão de entrada $V_a(s)$ no motor CC, dada em (10):

$$R(s) = \frac{K_m \cdot (A_2 s^2 - g)}{A_1 s^2 \cdot (R_a A_9 s^2 + K_b K_m s + R_a A_8)} V_a(s) \tag{10}$$

3. PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

Devido à elevada complexidade de (10), à subdivisão clara entre o motor CC e o sistema barra-bola, mas também à possibilidade de medir diretamente $\Theta(s)$ por meio de um potenciômetro acoplado ao seu eixo de rotação, optou-se por um sistema de controle em cascata em duas malhas com realimentação negativa, conforme figura 3:

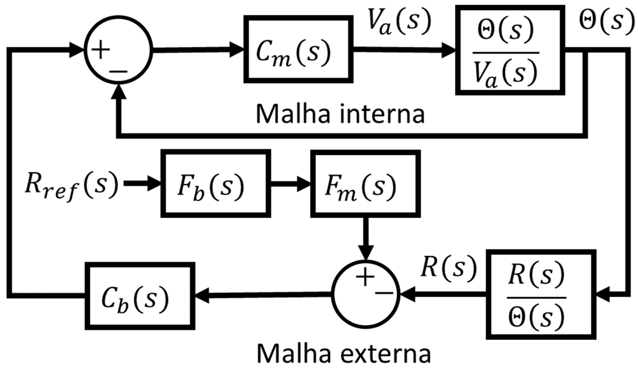

Figura 3. Sistema de controle em cascata projetado para o sistema barra-bola

Nesse sistema de controle, o motor CC ($\Theta(s)/V_a(s)$) é controlado pela malha interna, que contém o controlador $C_m(s)$. O sistema barra-bola ($R(s)/\Theta(s)$) é controlado pela malha externa, que contém o controlador $C_b(s)$. Os filtros pré-compensadores $F_b(s)$ e $F_m(s)$ são empregados para compensar os zeros de $C_b(s)$ e $C_m(s)$, respectivamente, sem afetar a alocação de polos realizada dentro de cada malha.

Como requisitos de desempenho para o sistema de controle projetado, definiu-se que a resposta ao degrau da malha externa deve ter sobressinal inferior a 5%, tempo de assentamento t_b a 2% ou ± 1 cm do valor final (o que ocorrer primeiro) inferior a 3 segundos e erro em regime permanente inferior a 1 cm. Já a resposta ao degrau da malha interna deve ter tempo de assentamento t_m a 2% ou ± 1° (grau) do valor final (o que ocorrer primeiro) inferior a 0,5 segundo, erro em regime permanente inferior a 1° e capacidade de rejeitar perturbações de tipo 0 (intensidade constante).

A ordem e os parâmetros de $C_b(s)$ e $C_m(s)$ foram determinados usando a técnica de alocação de polos, descrita em (11) para malhas de controle com realimentação negativa (Keviczky and Bányasz, 2015),

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}, P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, Q(s) = \frac{N_Q(s)}{D_Q(s)},$$

$$\frac{N_C(s) N_P(s)}{D_C(s) D_P(s) + N_C(s) N_P(s)} = \frac{N_Q(s)}{D_Q(s)}, \tag{11}$$

onde $C(s)$ é o controlador da malha, $P(s)$ é a planta da malha a ser controlada, e $Q(s)$ é a função de transferência desejada para o sistema em malha fechada resultante (Keviczky and Bányasz, 2015).

Para determinar os parâmetros de $Q(s)$ que atendem os requisitos de desempenho para ambas as malhas, empregou-se a topologia de filtro passa-baixa de Bessel, cuja função de transferência $Q_B(s, \omega_c, n)$ é dada em (12) (Raut and Swamy, 2010):

$$Q_B(s, \omega_c, n) = \frac{(2n)!}{n!2^n} \cdot (\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}k!(n-k)!}(\frac{s}{\omega_c})^k)^{-1} \quad (12)$$

Onde n é a ordem do filtro e ω_c é a frequência angular de corte do filtro, em rad/s. Esse filtro apresenta um atraso de propagação constante em sua banda de passagem, o que minimiza sobressinais e demais distorções no formato do sinal recebido e o torna uma boa opção para rastreamento de sinais de entrada (Carter and Mancini, 2018).

A resposta ao degrau de um filtro de Bessel apresenta sobressinal abaixo de 1% para qualquer valor de n, o que dispensa considerações sobre o valor do sobressinal do sistema durante o processo de alocação de polos (Bianchi and Sorrentino, 2007). Além disso, seu tempo de assentamento t_s é inversamente proporcional a ω_c, permitindo o ajuste da resposta ao degrau de $Q_B(s, \omega_c, n)$ aos requisitos de tempo de assentamento de cada malha de controle (Carter and Mancini, 2018).

Para que o denominador de (11) tenha uma solução única para $N_C(s)$ e $D_C(s)$ que garanta a alocação de todos os polos do sistema resultante conforme os polos de $Q(s)$, é necessário que: a) o grau de $D_C(s)D_P(s) + N_C(s)N_P(s)$ seja igual ao de $D_Q(s)$ garantindo uma correspondência entre os coeficientes de ambos os polinômios; b) o grau de $D_C(s)$ deve ser igual ao de $N_C(s)$, garantindo a causabilidade de $C(s)$; e c) o número de parâmetros sintonizáveis de $D_C(s)$ e $N_C(s)$ deve ser igual ao grau de $D_C(s)D_P(s)$ menos 1, garantindo que o número de incógnitas será igual ao número de coeficientes. Dessa forma, é possível montar um sistema linear para determinar $N_C(s)$ e $D_C(s)$ (Keviczky and Bányasz, 2015).

Devido a $\Theta(s)/V_a(s)$ e $R(s)/\Theta(s)$ serem sistemas de 2ª ordem e a necessidade de ação integral na malha interna para atender ao requisito de rejeição de distúrbios, definiu-se C_b como um controlador de 1ª ordem e C_m como um controlador de 2ª ordem com integrador. A ordem maior de C_m é decorrente de seu integrador aumentar o grau de $D_C(s)D_P(s)$ sem adicionar um parâmetro sintonizável, exigindo o aumento da ordem de C_m para atender os critérios do parágrafo anterior.

Dessa forma, a função de transferência resultante da malha interna será de 4ª ordem e a da malha externa de 3ª ordem. A aplicação da técnica de alocação de polos nas malhas interna e externa resultou em (13) e (14),

$$(\frac{(D_{b_0} + D_{b_1}s)A_1s^2}{(N_{b_0} + N_{b_1}s)(A_2s^2 - g)} + 1)^{-1} = Q_B(s, \omega_b, 3), \quad (13)$$

$$(\frac{s(D_{m_0} + D_{m_1}s)(R_aA_9s^2 + K_bK_ms + R_aA_8)}{(N_{m_0} + N_{m_1}s + N_{m_2}s^2)K_m} + 1)^{-1} = Q_B(s, \omega_m, 4), \quad (14)$$

onde $\{N_{b_0}, N_{b_1}\}$ e $\{D_{b_0}, D_{b_1}\}$ são, respectivamente, os coeficientes do numerador e do denominador de C_b; e $\{N_{m_0}, N_{m_1}, N_{m_2}\}$ e $\{D_{m_0}, D_{m_1}\}$ são, respectivamente, os coeficientes do numerador e denominador de C_m. ω_b representa a frequência angular de corte do filtro de Bessel adotado como referência para a alocação de polos da malha externa, enquanto ω_m representa a respectiva frequência angular para a malha interna.

Igualando os coeficientes dos polinômios nos denominadores de (13) e (14) e resolvendo os sistemas de equações resultantes para os coeficientes de C_b e C_m, obtêm-se as expressões na tabela 3:

Tabela 3. Coeficientes de C_b e C_m

Coeficiente	Expressão
N_{b_0}	$-15\omega_b^3 g^{-1}$
N_{b_1}	$-15\omega_b^2 g^{-1}$
D_{b_0}	$6\omega_b A_1^{-1} + 15A_2\omega_b^3(A_1g)^{-1}$
D_{b_1}	$A_1^{-1} + 15A_2\omega_b^2(A_1g)^{-1}$
N_{m_0}	$105\omega_m^4 K_m^{-1}$
N_{m_1}	$(105\omega_m^2 - 10A_8A_9^{-1})\omega_m K_m^{-1}$
N_{m_2}	$45\omega_m^2 K_m^{-1} - 10K_b\omega_m(R_aA_9)^{-1} - A_8(K_mA_9)^{-1}$
D_{m_0}	$10\omega_m(R_aA_9)^{-1} - K_bK_m(R_aA_9)^{-2}$
D_{m_1}	$(R_aA_9)^{-1}$

Com os coeficientes de C_b e C_m determinados, foram obtidas as expressões para F_b e F_m dadas em (15) e (16):

$$F_b(s) = \frac{N_{b_0}}{N_{b_1}s + N_{b_0}} \quad (15)$$

$$F_m(s) = \frac{N_{m_0}}{N_{m_2}s^2 + N_{m_1}s + N_{m_0}} \quad (16)$$

Simulações das respostas ao degrau de $Q_B(s, \omega_b, 3)$ e $Q_B(s, \omega_m, 4)$ em função de ω_b e ω_m, respectivamente, foram realizadas para encontrar os valores de frequência de corte que atendem aos limites de tempo de assentamento de cada malha de controle. Dessa forma, foram escolhidos os valores de $\omega_b = 0{,}7$ rad/s – que resulta em $t_b = 2{,}96$ s – e $\omega_m = 3,7$ rad/s – que resulta em $t_m = 0,499$ s.

Para compensar o torque estático do peso da bola sobre a barra, um dos principais componentes não lineares do torque resultante no sistema barra-bola, visto que propõe-se a adição de um sinal de tensão $v_{bo}(t)$ a $v_a(t)$, descrito por (17), de forma a gerar um torque adicional igual ao torque gerado pelo peso da bola sobre a barra, compensando a perturbação causada pelo peso da bola sobre o sistema.

$$\frac{K_m v_{bo}}{R_a} = g m_{bo} r \cdot \cos(\theta)$$

$$v_{bo} = \frac{g m_{bo} R_a r \cdot \cos(\theta)}{K_m} \tag{17}$$

Como (17) requer informações sobre parâmetros conhecidos (m_{bo}, g, R_a e K_m) e sobre estados do sistema diretamente medidos pelo sistema de controle (r e θ), v_{bo} pode ser calculado e inserido instantaneamente em v_a, compensando diretamente o torque do peso da bola sem exigir uma ação de controle proveniente do integrador de C_m, cuja resposta é mais lenta devido ao acúmulo de erro necessário para gerar um sinal de controle suficiente para realizar a compensação. Dessa forma, C_m é aliviado da perturbação e esforço de controle pode ser alocado para as demais perturbações e não linearidades do sistema.

4. SIMULAÇÃO DA RESPOSTA TEMPORAL DO SISTEMA

Com o sistema de controle projetado, a resposta ao degrau do sistema barra-bola foi simulada computacionalmente, a fim de analisar os efeitos da compensação do torque do peso da bola. A tabela 4 fornece os valores dos parâmetros adotados para o sistema barra-bola, no qual o servomotor CC Hitec HS-422 foi adotado como atuador.

Tabela 4. Valores dos parâmetros do sistema barra-bola e do motor CC.

Parâmetro	Valor	Sistema
m_{bo}	0,06 kg	Barra-bola
m_{ba}	0,5 kg	Barra-bola
J_{ba}	0,01 kg.m²	Barra-bola
R_0	0,03 m	Barra-bola
R_1	0,02 m	Barra-bola
D	-0,01 m	Barra-bola
d	-0,01 m	Barra-bola
L	0,5 m	Barra-bola
R_a	7,5 Ω	Motor CC
K_m	0,50 N.m/A	Motor CC
K_b	0,83 V.s/rad	Motor CC

A partir da tabela 4, foram obtidas as funções de transferência para o sistema barra-bola linearizado (18), o motor CC (19), e para os controladores e filtros pré-compensadores do sistema de controle (20, 21, 22 e 23).

$$\frac{R(s)}{\Theta(s)} = \frac{0,028s^2 - 9,810}{1,9s^2} \tag{18}$$

$$\frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{6,667}{1,005s^2 + 5,500s + 4,316} \tag{19}$$

$$C_b(s) = -\frac{1,456s + 1,019}{1,044s + 4,311} \tag{20}$$

$$C_m(s) = \frac{334,8s^2 + 3951s + 15000}{5,056s^2 + 159,4s} \tag{21}$$

$$F_b(s) = \frac{1,019}{1,456s + 1,019} \tag{22}$$

$$F_m(s) = \frac{15000}{334,8s^2 + 3951s + 15000} \tag{23}$$

A figura 4 mostra a resposta r a uma entrada em degrau de 20 cm do sistema barra-bola não-linear (3 e 4) acoplado ao sistema de controle da figura 3 em dois cenários: a) sem v_{bo} e b) com v_{bo}. A figura 5 mostra a tensão de entrada v_a em ambos os cenários, enquanto a figura 6 mostra o sinal de tensão externa v_{bo} inserido na simulação com compensação do torque estático da bola.

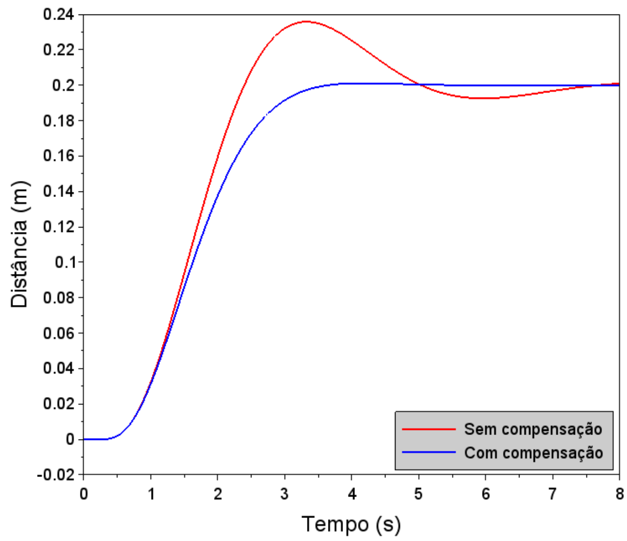

Figura 4. Respostas ao degrau do sistema barra-bola não-linear.

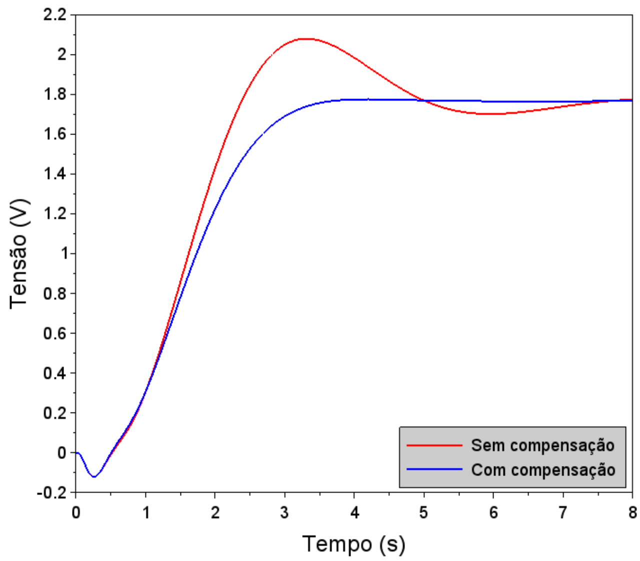

Figura 5. Tensão de entrada v_a.

Sem v_{bo}, a resposta ao degrau foi significativamente afetada pelo peso da bola e demais não-linearidades do sistema barra-bola - compensadas apenas pelo controle integral na malha interna nesse caso - e resultou em um sobressinal de 18% em 3,3 s e tempo de assentamento de 4,6 segundos pelo critério de ±1 cm, não atendendo aos requisitos de desempenho para a resposta temporal.

A figura 5 mostra que v_a apresentou valores compatíveis com seus limites de atuação (±5V) em ambos os cenários.

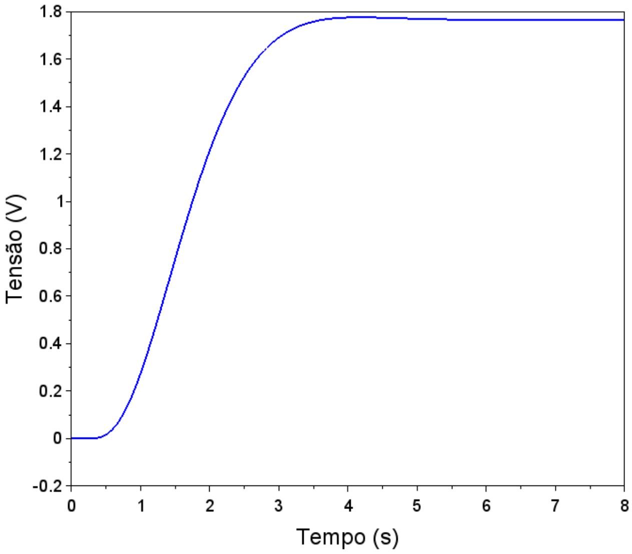

Figura 6. Sinal de tensão externa v_{bo} aplicado ao motor CC.

v_a apresentou um formato similar ao de r a partir de t $> 0,5$ s, indicando que, nesse ponto em diante, v_a é proporcional à r e possivelmente decorrente do torque estático do peso da bola.

A figura 6 confirma essa procedência ao mostrar a forma de onda de v_{bo}, que é praticamente idêntica ao sinal v_a da simulação com compensação a partir de t $> 0,5$ s. Isso demonstra que a maior parte de v_a, a partir desse intervalo, provêm do integrador tentando compensar esse torque estático, resultando no sobressinal e no atraso de assentamento em relação à resposta linear.

Com a adição de v_{bo}, o integrador não teve que compensar o peso da bola, resultando em uma resposta mais rápida (tempo de assentamento de 2,94 s pelo critério de ± 1 cm) e com menor sobressinal (0,55% em 4,2 s), atendendo aos requisitos de desempenho para a resposta temporal.

Além disso, a adição de v_{bo} aproximou o comportamento do sistema barra-bola não-linear de seu modelo linearizado, com ambos apresentando uma resposta ao degrau praticamente idêntica, conforme mostra a figura 7.

Essa diferença mostra que a compensação do peso da bola por um sinal externo ao sistema de controle linear foi suficiente para tornar a resposta do modelo não linear praticamente idêntica ao modelo linear, indicando que o peso da bola é o principal responsável pelas divergências entre o modelo linear e não linear do sistema barra-bola. As demais não linearidades não apresentaram influência significativa na resposta do sistema e podem ser relegadas ao controle integral sem prejudicar seu desempenho.

A compensação direta do peso da bola permitiu que o sistema não linear se comportasse de forma praticamente idêntica ao sistema linearizado, resultando em um desempenho mais próximo do esperado pela análise da malha de controle linear e confiável no uso do modelo linear para projetar controladores para o sistema barra-bola.

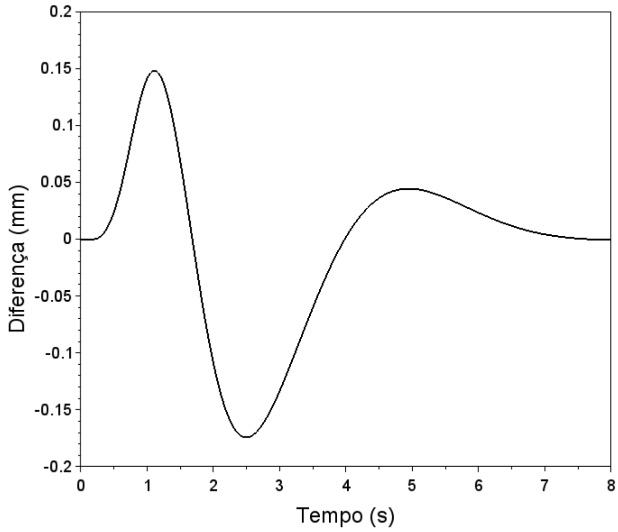

Figura 7. Diferença entre a resposta linear e não-linear com compensação.

5. CONCLUSÃO

A adição de um sinal de tensão externo ao sistema de controle no motor CC nos moldes de (17) permite, de forma simples, que sistemas barra-bola com controladores lineares apresentem um desempenho similar ao de seus modelos linearizados, aumentando a confiabilidade e a eficiência de técnicas de controle linear nesse sistema.

REFERÊNCIAS

Bertolotto, R.R. and Camargo, R.F. (2015). Equações diferenciais fracionárias em engenharia. *Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC Sudeste 2015).*

Bianchi, G. and Sorrentino, R. (2007). *Electronic Filter Simulation & Design*. McGraw-Hill.

Bolton, W. (2019). *Mechatronics: Electronic Control Systems in Mechanical and Electrical Engineering*. Pearson.

Carter, B. and Mancini, R. (2018). *Op Amps for Everyone*. Newnes.

Keviczky, L. and Bányasz, C. (2015). *Two-Degree-of-Freedom Control Systems: the Youla parameterization approach*. Elsevier.

Raut, R. and Swamy, M.N.S. (2010). *Modern Analog Filter Analysis and Design: A practical approach*. Wiley.

Schvarcz, A.F. and Diniz, I.S. (2010). Modelagem, simulação e controle de um sistema barra e bola auxiliado por computador: Cad e cae. *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, 4253–4259.

Tsarik, V. (2020). Oscillation control in the underactuated “ball and beam” system. *IFAC PaperOnLine*, 53, 9227–9231.

Wellstead, P.E., Chrimes, V., Fletcher, P.R., Moody, R., and Robins, A.J. (1978). The ball and beam control experiment. *The International Journal of Electrical Engineering and Education*, 15.

Zaare, S. and Soltanpour, M.R. (2021). The position control of the ball and beam system using state-disturbance observe-based adaptive fuzzy sliding mode control in presence of matched and mismatched uncertainties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 150.